

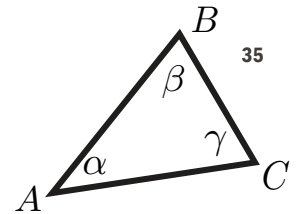
ME 10-1 : Compensation paramétrique

- Expression du problème
 - Modèle fonctionnel
 - linéaire – exemple: triangle + générale
 - non-linéaire compact (polycopié)
 - développé – exemple: tableau + logarithme sur moodle
- Résolution
 - forme quadratique – extremum lié – Lagrange
 - réduction du système d'équations
 - taille des matrices – à inverser: $u \times u$
 - Solution numérique d'une exemple
 - Solution analytique d'autres exemples



Exemple de triangle en compensation paramétrique

$$\begin{aligned}\ell_\alpha &= 61.341 \text{ gon} \\ \ell_\beta &= 99.658 \text{ gon} \\ \ell_\gamma &= 38.986 \text{ gon}\end{aligned}$$



- Avant (connu en conditionnelle)

$$(\ell_\alpha - v_a) + (\ell_\beta - v_b) + (\ell_\gamma - v_g) - 200 = 0$$

- Procédé « paramétrique »
 - Une équation par chaque observation
 - Paramètres indépendants ?
 - Pas plus des paramètres que nécessaires
 - (sinon pas de redondance, ou problème combiné)
 - Pratiquement comment ?

- www.ttpoll.eu

- Room: ME4U (en majuscules)

$$\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$$

Rappelle compensation paramétrique

■ Modèles

- générale $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
- linéaire ? (tableau)
 - en vecteur - matrice

$$(\ell - \mathbf{a}_0) - \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- développé

$$\begin{cases} \check{\ell}_1 = a_{10} + a_{11}\check{x}_1 + \cdots + a_{1u}\check{x}_u \\ \vdots \\ \check{\ell}_n = a_{n0} + a_{n1}\check{x}_1 + \cdots + a_{nu}\check{x}_u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_0} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1u} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Rappelle compensation paramétrique

■ Modèles

- générale $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
- Non-linéaire ? (tableau)
 - en vecteur - matrice

$$\begin{cases} \ell_1 - v_1 = f_1(\check{x}_1 + \dots + \check{x}_u) \\ \vdots \\ \ell_n - v_n = f_n(\check{x}_1 + \dots + \check{x}_u) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1(\dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_u) \\ \vdots \\ f_n(\dot{x}_1 + \dots + \dot{x}_u) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1u} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nu} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A} = \frac{\partial f_i(\cdot)}{\partial \mathbf{x}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \vdots \\ \delta x_u \end{bmatrix}}_{\delta \mathbf{x}}$$

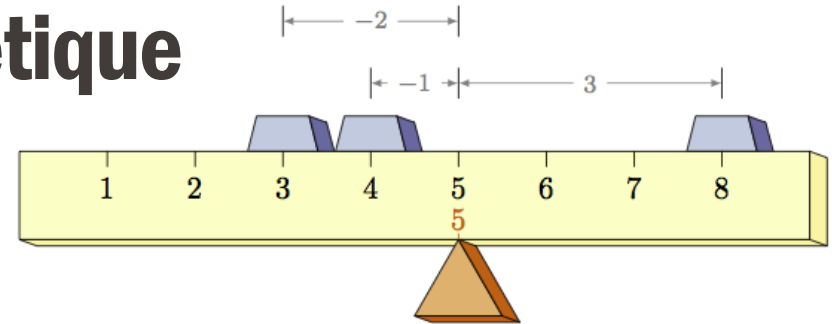
Exemple de logarithme en compensation paramétrique

- Modèles

- Non-linéaire $\ell - \mathbf{v} = f(\mathbf{x})$
- Logarithme $\ell_i - v_i = f_i(a, b) = a \cdot \ln(b + t_i)$

- Résolu sur Moodle

ME 10-2 : moyenne arithmétique

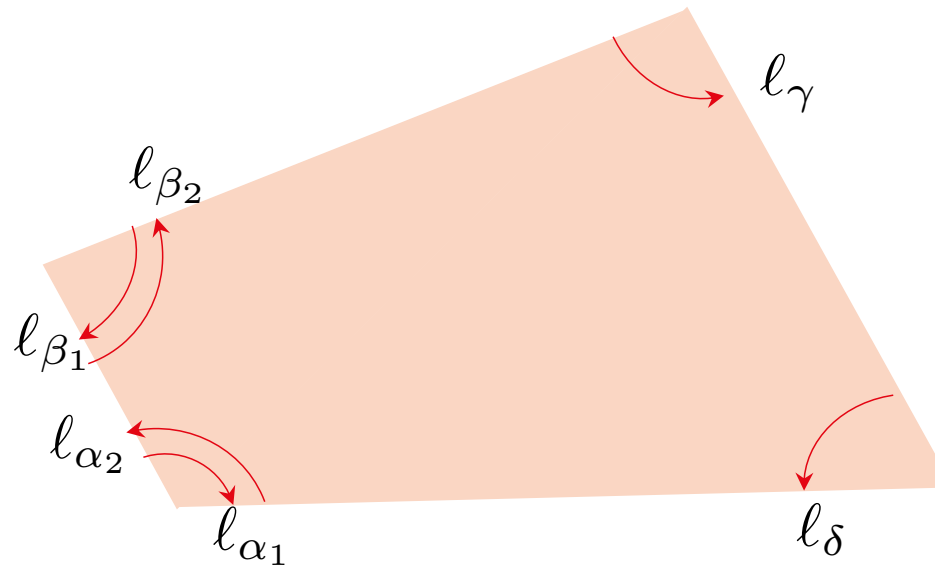


- Objectifs
 - applique le concept des moindres carrées
 - apprivoiser les formules générales

 - Poser le problème dans le cas général
 - minimum sous conditions (Lagrange)
 - dériver par rapport à $\mathbf{v}$, à $\mathbf{k}$ et à $\mathbf{x}$
 - résoudre le système d'équations

 - Court-circuiter Lagrange (merci à Gauss ;-)
- grâce au modèle simple, placer $\mathbf{x}$ dans $\mathbf{v}$ (après $\mathbf{k}$ devient inutile)
 - dériver la forme quadratique uniquement par rapport à $\mathbf{x}$
 - déjà fait pour introduire les moindres carrés **Exo7** et cela n'avait surpris personne !

Exemple - Quadrilatère



■ Observations

α 2×, β 2×, γ , δ

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = \sigma_{\gamma} = \sigma_{\delta} = \sigma_a$$

■ Solution(s)

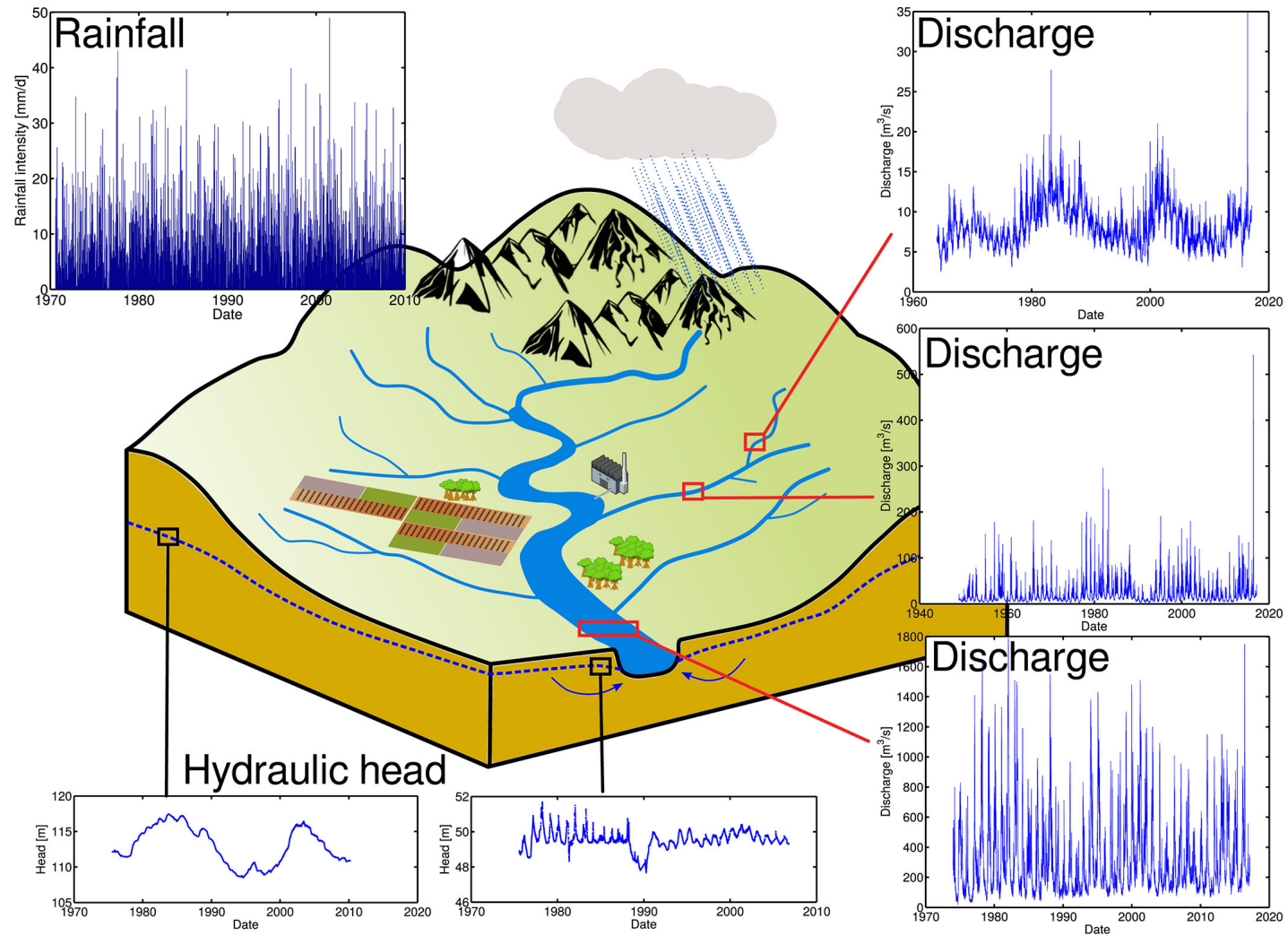
- A. Proposez vous-même (par 2 ou 3)
- B. Montrez-le au tableau

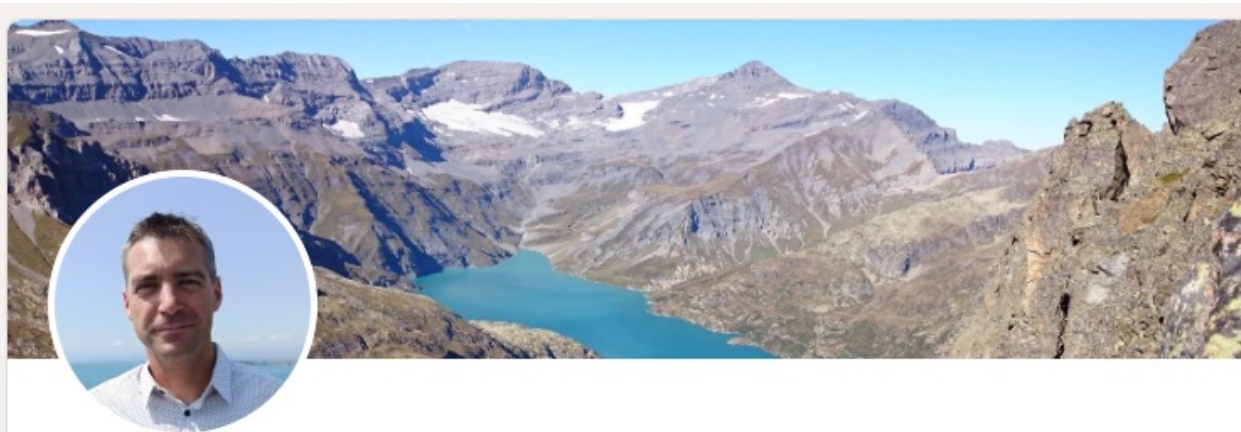
Poser le problème

1. Combine des mesures ?
2. Choix des paramètres ?
3. Modèle stochastique = ?



$$x(i) = M_x + \sum_{k=1}^m [A_k \sin(\omega_k i) + B_k \cos(\omega_k i)] + \eta(i)$$





Frédéric Jordan · 2nd

Co-fondateur et Directeur @ Hydrique | Guide de montagne |
Explorateur en quête d'innovation

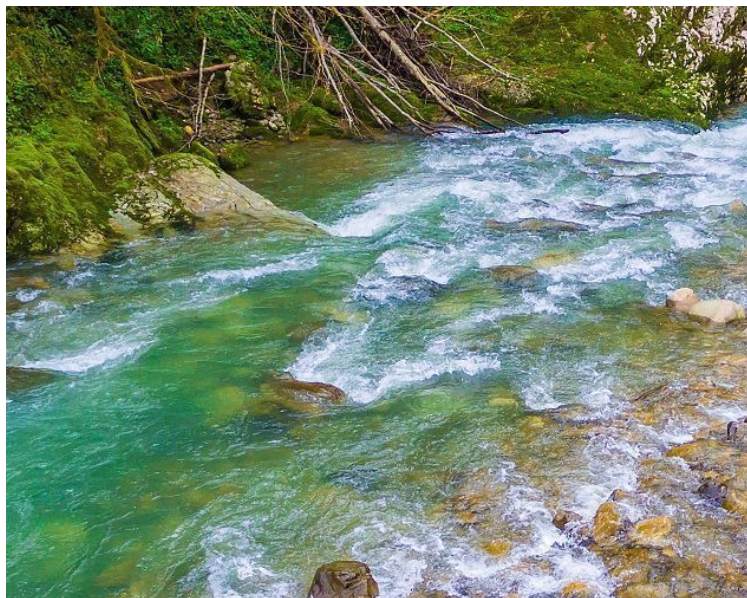
Lausanne, Vaud, Switzerland · [Contact info](#)



Hydrique Engineers



École polytechnique
fédérale de Lausanne



SITEMAP

[Home](#)

[About us](#)

[Contact](#)

SERVICES

[Real-Time Flood and
Hydropower Forecasting](#)

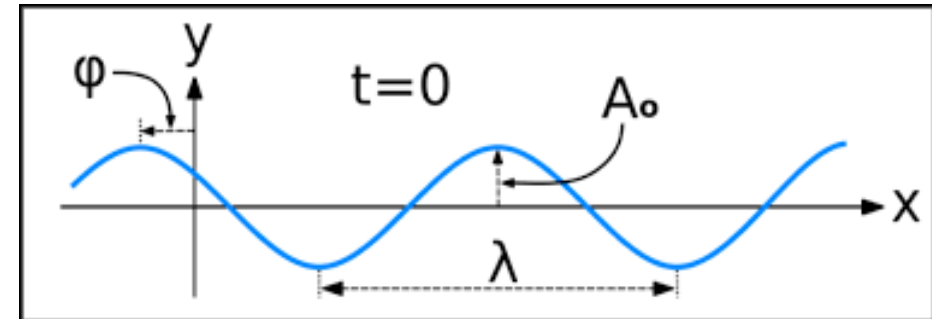
[Wastewater tracking](#)

[Engineering: sediment / lakes /
hydraulics](#)

ME 10-3 : Procédé et exemples

- Ajustement d'une fonction sinusoïdale
polycopié pp. 90-102

- 1 $y = c$
- 2 $y = c + a \cdot \sin(\omega t)$
- 3 $y = c + a \cdot \sin(\omega t + \phi)$
- 4 $y = c + a \cdot \sin(\Omega t + \phi)$ avec $\Omega = 2\pi/24$ heures



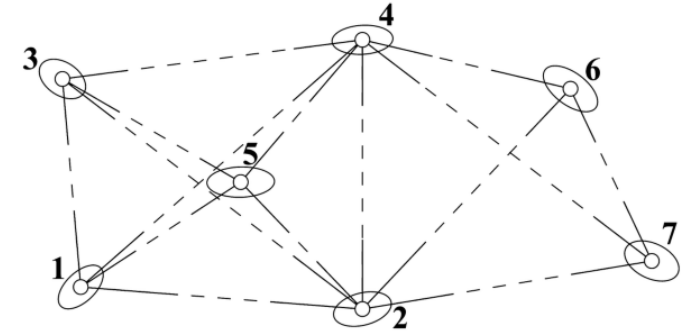
- Corrigé (modèles, analyses, valeurs numériques) dans le polycopié
 - T plus intuitif que $\omega \implies y = c + a \cdot \sin(2\pi / T \cdot t + \phi)$
 - Peut-on fixer la période estimée à 24 heures ?

La période estimée n'est pas significativement différente de 1 jours dans le cas suivant :

$$\frac{\hat{T} - 24}{\sigma_{\hat{T}}} \leq 2 \text{ à } 3$$

ME 10-3 : Analyse des résultats

- Premier résultats
 - paramètres compensés $\hat{\mathbf{x}}$, formules 13 et 14
- Autres résultats
 - résidus compensés $\hat{\mathbf{v}}$, formules 15 ou 16
 - observations compensées $\hat{\ell}$
 - cofacteurs $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}$ et $\mathbf{Q}_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$



- Estimation de la précision
 - variance et écart-type *a posteriori*
 - quotient global: $\hat{\sigma}_0 \text{ a posteriori} / \sigma_0 \text{ a priori} = \hat{\sigma}_0 / \sigma_0$

- Résidu significatif ? À tester :
 - le quotient local : résidu / écart-type de l'observation $= \hat{v}_i / \sigma_{\ell_i}$
 - le résidu standardisé : résidu / son écart-type $= \hat{v}_i / \sigma_{\hat{v}_i}$
- Paramètre significatif ? tester : $\hat{x}_j / \sigma_{\hat{x}_j}$